4.2. Demuestre la propiedad de pérdida de memoria para la distribución exponencial, es decir, muestre que para cualesquiera enteros positivos a y b, $P(X>a+b \mid X>a)=P(X>b)$

$$P(X > a + b|X > a) = P(\{X > a + b\} \cap \{X > a\})/P(X > a)$$

Si $X>a+b$ *entonces* $X>a$. *Por lo tanto* $\{X > a + b\} \cap \{X > a\} = \{X > a + b\}$. *Luego,*

$$P(X > a + b|X > a) = \frac{P(X > a + b)}{P(X > a)} = \frac{e^{-\beta(a+b)}}{e^{-(\beta a)}} = e^{-\beta b} = P(X > b)$$

$$\boxed{P(X > a + b|X > a) = P(X > b)} \qquad (Respuesta)$$

4.3. Considere una fuente de poder cuyo tiempo de vida se distribuye exponencial con media 2 años. Si dicha fuente ha funcionado correctamente por 1 año, calcule la probabilidad de que funcione por un año adicional.

$$T \sim \exp(\beta) \quad tal\ que \quad E(T) = 2\ años \quad => f_T(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} \quad t > 0$$

$$P(T > 1 + 1|T > 1) = P(T > 1) = e^{-\frac{1}{2}} \quad . \boxed{La\ probabilidad\ pedida\ es\ e^{-\frac{1}{2}}} \quad (Respuesta)$$

5. A través de una encuesta se quiere estimar la fracción p de adultos de la población que se interesaría en un nuevo producto. Se interroga a n personas de la población, y se estima p como $\hat{p} = \frac{X}{n}$, siendo X el número de personas encuestadas que manifiestan interés en el producto.

5.1. Utilice la desigualdad de Chebyshev para acotar el tamaño de la muestra, si se quiere que p y $\hat{p}$ difieran en menos de 0.02, con probabilidad mayor que 0.9. (2 ptos)

$$P(|\hat{p} - p| > \epsilon) \le \frac{Var(\hat{p})}{\epsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \le \frac{1}{4n\epsilon^2} \le 1 - 0.9 = 0.1$$

Por lo tanto, haciendo $\epsilon = 0.02$ *y despejando n se obtiene* $\boxed{n \ge \frac{1}{4(0.02)^2 .0.1} = \mathbf{6250}}$ $(Respuesta)$

Nota: Necesario hacer comentarios al estudiante...

5.2. Utilice el T.L.C. para aproximar la misma probabilidad de la parte 1.

$$P(|\hat{p} - p| > \epsilon) \Leftrightarrow P\left(\left(\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) > \frac{\epsilon}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 0.05$$

No se conoce el verdadero p, pero p(1-p) se puede acotar por 1/4. Si se toma p(1-p)=1/4, correspondiente al peor caso (máxima varianza), el n calculado será superior al buscado, y puede servir como un tamaño de muestra "conservador" para la realización de la encuesta.

$$\Leftrightarrow P\left(Z > \frac{\epsilon}{\sqrt{\frac{1}{4n}}}\right) \cong 0.05 \Leftrightarrow Z_{0.05} = \sqrt{4n}\epsilon \Leftrightarrow \frac{Z_{0.05}^2}{4\epsilon^2} = n$$

En el examen, al buscar por tabla, se obtenía $n \cong \frac{1.65^2}{4(0.02)^2} \cong 1701.56$. *Por lo tanto* $n \ge 1702$ *satisface la condición y se toma el menor valor* ***n=1702.*** *(Respuesta)*

Nota al estudiante: Al calcular el cuantil exacto (con métodos numéricos) $n \cong \frac{1.645^2}{4(0.02)^2} \cong 1690.96$. *A su vez, si el verdadero p es diferente de 1/2, p(1-p) sería menor que 1/4 y seguramente existe un* n *aun menor que* 1691 *que satisface la condición.*

5.3. Compare los resultados de las partes 1 y 2.

Es claro ver que ***n (Chebyshev) > n (TLC).*** *(Respuesta)*

Esto se esperaba. La desigualdad de Chebyshev arroja una cota de la probabilidad considerada, mientras el TLC (siempre que se pueda aplicar) es un resultado aproximado mucho más cercano a la verdadera probabilidad. Por lo tanto el n (TLC) es bastante cercano al mínimo n que satisface la condición de que $\hat{p}$ *y p difieran en menos de 0.02, con probabilidad mayor que 0.9, tal como se pide.*

Nota: Este simulacro es puramente de referencia y complementario. No sustituye las clases, libros, tareas etc. Prof. Hugo Montesinos